



ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 95 за 2018 г.



ISSN 2071-2898 (Print)  
ISSN 2071-2901 (Online)

**Лахно В.Д.**

Сверхпроводящие свойства  
неидеального газа ТИ-  
биполяронов

**Рекомендуемая форма библиографической ссылки:** Лахно В.Д. Сверхпроводящие свойства неидеального газа ТИ-биполяронов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 95. 25 с. doi:[10.20948/prepr-2018-95](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-95)  
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-95>

**О р д е н а Л е н и н а**  
**ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**  
**имени М.В.Келдыша**  
**Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к**

**В.Д. Лахно**

**Сверхпроводящие свойства  
неидеального газа ТИ-биполяронов**

**Москва – 2018**

***В.Д. Лахно***

### **Сверхпроводящие свойства неидеального газа ТИ-биполяронов**

В работе рассмотрены свойства бозе-газа из трансляционно-инвариантных (ТИ) биполяронов, являющихся аналогом куперовских пар. Как и в теории БКШ, в основе описания газа ТИ-биполяронов лежит электрон-фононное взаимодействие и гамильтониан Фр елиха. В отличие от теории БКШ, в которой корреляционная длина намного превышает среднее расстояние между парами, в настоящей работе рассматривается противоположный случай, когда корреляционная длина много меньше расстояния между парами.

Рассчитаны критическая температура перехода бозе-газа ТИ-биполяронов в сверхпроводящее состояние, его энергия, теплоёмкость и теплота перехода. Полученные результаты применяются для объяснения экспериментов по высокотемпературным сверхпроводникам. Обсуждаются возможные способы повышения критической температуры высокотемпературных сверхпроводников.

***Ключевые слова:*** трансляционно-инвариантные биполяроны, высокотемпературная сверхпроводимость

***V.D. Lakhno***

### **Superconducting properties of a nonideal bipolaron gas**

The properties of a Bose gas of translation-invariant (TI) bipolarons analogous to Cooper pairs are considered. As in the BCS theory, the description of a TI-bipolaron gas is based on the electron-phonon interaction and Fr ohlich Hamiltonian. As distinct from the BCS theory, when the correlation length greatly exceeds the mean distance between the pairs, here we deal with the opposite case when the correlation length is much less than the distance between the pairs. We calculate the critical temperature of the transition of a TI-bipolaron Bose-gas into the superconducting state, its energy, heat capacity and heat of the transition. The results obtained are used to explain the experiments on high-temperature superconductors. Possible ways of raising the critical temperature of high-temperature superconductors are discussed.

***Key words:*** translation-invariant bipolarons (TI-bipolarons), high-temperature superconductivity (HTSC)

# 1. Введение

В данной работе развивается представление о трансляционно-инвариантном (ТИ) биполярном газе как газе бозе-частиц, способных образовывать бозе-конденсат. Как показано в работах [1]-[3], ТИ-биполярон представляет собой связанное электрон-фононным взаимодействием (ЭФВ) состояние двух электронов, которое остаётся делокализованным при любой величине константы ЭФВ. В [1]-[3] показано, что такое состояние электронов оказывается энергетически выгоднее samozахваченного локализованного двухэлектронного состояния, представляющего собой биполярон Пекара.

Поскольку ТИ-биполяронный газ является газом заряженных бозонов, то его бозе-конденсат соответствует сверхпроводящему (СП) состоянию. Это представляет большой интерес, т.к. всё большее число экспериментальных и теоретических работ, посвящённых высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), основывается на представлении о биполяронах [4]-[8].

Существенно, что в основе теории ТИ-биполяронов лежит тот же исходный гамильтониан Фрёлиха, что и используемый в теории БКШ [9]. Отличие лишь в том, что в теории БКШ электроны взаимодействуют с акустическими фононами, а в теории ТИ-биполяронов – с оптическими, и связано это с тем, что для объяснения свойств ВТСП важнее рассматривать взаимодействие с оптическими фононами. Отличие же в теоретическом подходе состоит в том, что теория БКШ основана на исключении фононных переменных из гамильтониана и исследовании полученного в результате такого исключения гамильтониана, содержащего только электронные переменные. В противоположность подходу БКШ в теории ТИ-биполяронного газа из гамильтониана исключаются электронные переменные. В итоге получается гамильтониан, зависящий только от фононных переменных. Спектр собственных значений такого гамильтониана определяет спектр возбуждений биполяронных состояний. Полученный таким образом спектр и используется затем для описания статистических свойств идеального газа биполяронов.

К такому подходу, однако, возникают важные вопросы. Будучи заряженным, газ из ТИ-биполяронов никак не может быть идеальным, поскольку между биполяронами должно существовать кулоновское взаимодействие. Из теории неидеального газа известно, что учёт взаимодействия между частицами приводит к качественным изменениям в его спектральных свойствах. Согласно [10], даже в случае короткодействующего взаимодействия учёт последнего приводит к появлению в спектре щели, отсутствующей в идеальном газе. Ещё более значительных изменений можно ожидать при наличии дальнедействующего кулоновского взаимодей-

ствия. Рассмотрение этих вопросов и является основной целью данной работы.

Логическая схема развиваемого ниже подхода такова:

а) вначале рассматривается частный случай, когда имеются только два электрона, взаимодействующих с фононным полем. Это классическая задача о биполяроне [11];

б) затем рассматривается многоэлектронная задача, приводящая к представлению о ферми-жидкости. Для этой многоэлектронной задачи рассматривается случай двух дополнительных электронов, находящихся над поверхностью Ферми (вблизи поверхности) связанных ЭФВ (задача Купера) [12];

в) далее считается, что почти все электроны, лежащие в энергетическом слое  $[E_F + E_{pol}, E_F]$ , где  $E_F$  – энергия Ферми,  $E_{pol}$  – энергия полярона, находятся в ТИ-поляронном состоянии [12]; соответственно, все электроны в узком слое  $[E_F + E_{bp}/2 - \delta E, E_F + E_{bp}/2 + \delta E]$ ,  $\delta E \rightarrow 0$ , находятся в ТИ-биполяронном состоянии, где  $E_{bp}$  – энергия ТИ-биполярона. Сконденсированный биполяронный газ приводит к бесконечной плотности электронных состояний в этом слое;

г) биполяроны рассматриваются как заряженные бозоны, помещённые в электронную ферми-жидкость (поляронный газ), экранирующую взаимодействие между биполяронами, и задача сводится к задаче о неидеальном заряженном бозе-газе;

д) найденный спектр такой задачи используется для расчёта статистических свойств газа из ТИ-биполяронов.

Как было отмечено выше, теория сверхпроводимости строится как теория биполяронного бозе-газа, в котором сверхпроводящее состояние представляет собой биполяронный конденсат. В отличие от обычного идеального бозе-газа, в котором сверхтекучесть отсутствует, идеальный газ из ТИ-биполяронов обладает сверхтекучестью. Таким образом, сверхпроводимость в рассматриваемой теории представляет собой сверхтекучесть идеального газа биполяронов. В обычном бозе-газе сверхтекучесть возможна только при наличии взаимодействия между бозонами и, как правило, существует только при низких температурах. Будучи сверхтекучим, идеальный биполяронный газ сохраняет это свойство и в случае его неидеальности.

Развитую теорию биполяронного газа можно положить в основу теории высокотемпературной сверхпроводимости. Такая теория, однако, имеет свои ограничения хотя бы потому, что, как и теория БКШ, относится к случаю непрерывной среды. Существенно, однако, что в силу делокализации ТИ-биполярон не «замечает» дискретности решётки, а также наличие примесей и дефектов, если взаимодействие с ними невелико.

Если взаимодействие электронов с решёткой очень сильное или, что

то же самое, электрон, находящийся на каком-нибудь из атомов решётки, почти не взаимодействует с соседними атомами, то ТИ-биполярон, описание которого основано на гамильтониане Фрёлиха, разрушается. В этом случае состояние электронов описывают различными дискретными моделями. Наиболее популярными теориями сверхпроводимости, основанными на таком подходе, являются модель резонирующих валентных связей (RVB) и t-J модель [13]. В их основе лежит использование гамильтониана Хаббарда и его обобщения – гамильтониана Хаббарда–Холстейна. Последний в континуальном пределе переходит в гамильтониан Фрёлиха, на основании которого строится теория ТИ-биполяронов.

Проблемы построения теории СП как теории бозе-конденсации с использованием дискретных моделей наиболее ярко иллюстрирует применение теории биполяронов малого радиуса (ПМР) для описания ВТСП [4]-[5]. В основе этой теории лежит представление об образовании устойчивого связанного биполяронного состояния на одном узле решётки с последующим рассмотрением таких биполяронов малого радиуса как газа заряженных бозонов. Её реальное воплощение применительно к ВТСП, к сожалению, встречает непреодолимые трудности, связанные с невыполнением противоположных требований – необходимости большой константы электрон-фононного взаимодействия для образования ПМР, с одной стороны, и требованием её малости для того, чтобы уменьшить массу биполярона, от которой зависит температура сверхпроводящего перехода [14]-[19]. Ясно, что с такими же трудностями будет сталкиваться теория ВТСП, основанная на представлении о ПМР, использующая любые другие (отличные от фононного) механизмы взаимодействия.

В развиваемой ниже теории будет показано, что она свободна от указанной трудности.

Статья устроена следующим образом. В §2 рассматривается задача о неидеальном газе ТИ-биполяронов, которая сводится к известной задаче о заряженном бозе-газе. Показано, что вследствие экранировки в рассматриваемой системе не возникает щели, обусловленной взаимодействием бозе-частиц и фактически задача сводится к задаче об идеальном газе из ТИ-биполяронов, имеющих в своем спектре щель.

В §3 рассматриваются термодинамические характеристики газа ТИ-биполяронов. Для различных значений параметров, которыми являются фононные частоты, вычислены величины критических температур бозе-конденсации, теплоты перехода в состояние конденсата, теплоёмкости и скачки теплоёмкости в точке перехода.

В §4 даётся сравнение с экспериментом.

В §5 кратко суммированы полученные результаты и обсуждаются возможные способы повышения критической температуры высокотемпературных сверхпроводников.

## 2. Неидеальный газ ТИ-биполяронов

Чтобы построить теорию неидеального газа ТИ-биполяронов, необходимо знать спектр состояний отдельного ТИ-биполярона в полярной среде. Этот вопрос был подробно рассмотрен в [11]. Как показано в [12], этот спектр состояний будет тем же самым, что и ТИ-биполяронов, образующихся вблизи поверхности Ферми. Таким образом, ТИ-биполяроны в слое  $[E_F + E_{bp}/2, E_F]$  можно рассматривать как ТИ-биполяронный бозе-газ, находящийся в поляронном газе [20]. Если считать, что ТИ-биполяроны не взаимодействуют друг с другом, то такой газ можно считать идеальным. Его свойства будут полностью определены, если известен спектр отдельного ТИ-биполярона.

При рассмотрении теории идеального газа и сверхпроводимости на основе бозе-частиц из ТИ-биполяронов кулоновское взаимодействие между электронами учитывается только в парах, т.е. при рассмотрении задачи об отдельном биполяроне. Гамильтониан такой системы, согласно [11], имеет вид:

$$H_0 = \sum_k \epsilon_k \alpha_k^+ \alpha_k, \quad (1)$$

$$\epsilon_k = E_{bp} \Delta_{k,0} + (\omega_0 + E_{bp} + k^2/2M_e) (1 - \Delta_{k,0}), \quad (2)$$

где  $\alpha_k^+$ ,  $\alpha_k$ , – операторы рождения и уничтожения ТИ-биполяронов:  $\epsilon_k$  – спектр ТИ-биполяронов, полученный в [11];  $E_{bp}$  – энергия ТИ-биполярона;  $M_e = 2m^*$ ,  $m^*$  – эффективная масса электрона;  $\omega_0 = \omega_0(\vec{k})$  энергия оптического фонона;  $\Delta_{k,0} = 1$  для  $k = 0$  и  $\Delta_{k,0} = 0$  для  $k \neq 0$ . Выражение (1), (2) можно переписать в виде:

$$H_0 = E_{bp} \alpha_0^+ \alpha_0 + \sum_k' (\omega_0 + E_{bp} + k^2/2M_e) \alpha_k^+ \alpha_k, \quad (3)$$

где штрих в сумме в правой части (3) означает, что в суммировании отсутствует член с  $k = 0$ . Выделение в (3) члена с  $k = 0$  соответствует выделению бозе-конденсата, где:

$$\alpha_0 = \sqrt{N_0}, \quad (4)$$

$N_0$  – число ТИ-биполяронов в конденсатном состоянии. Таким образом, в теории идеального газа из ТИ-биполяронов первый член есть просто

$E_{bp}N_0$ . При построении теории неидеального бозе-газа ТИ-биполяронов будем исходить из гамильтониана:

$$H = E_{bp}N_0 + \sum'_k (\omega_0 + E_{bp}) \alpha_k^+ \alpha_k + \sum'_k t_k \alpha_k^+ \alpha_k + \quad (5)$$

$$1/2V \sum'_{k,k',k''} V_k \alpha_{k''-k}^+ \alpha_{k'+k}^+ \alpha_{k''} \alpha_{k'}, \quad t_k = k^2/2M_e,$$

в котором к гамильтониану  $H_0$  (3) добавлен последний член, описывающий взаимодействие биполяронов,  $V_k$  – матричный элемент взаимодействия биполяронов. Последние два члена в (5) в точности соответствуют гамильтониану заряженного бозе-газа [21]. Следуя стандартной процедуре выделения бозе-конденсата, получим из (5) гамильтониан:

$$H = E_{bp}N_0 + \sum'_k (\omega_0 + E_{bp}) \alpha_k^+ \alpha_k + \quad (6)$$

$$\sum'_k [(t_k + n_0 V_k) \alpha_k^+ \alpha_k + 1/2 n_0 V_k (\alpha_k \alpha_{-k} + \alpha_k^+ \alpha_{-k}^+)],$$

где  $n_0 = N_0/V$  – плотность частиц в бозе-конденсате.

Далее, с использованием преобразования Боголюбова:

$$\alpha_k = u_k b_k - v_k b_{-k}^+, \quad (7)$$

$$u_k = [(t_k + n_0 V_k + \epsilon_k) / 2\epsilon_k]^{1/2},$$

$$v_k = [(t_k + n_0 V_k - \epsilon_k) / 2\epsilon_k]^{1/2}, \quad \epsilon_k = [2n_0 V_k t_k + t_k^2]^{1/2}$$

в новых операторах получим гамильтониан

$$H = E_{bp}N_0 + U_0 + \sum'_k (\omega_0 + E_{bp} + \epsilon_k) b_k^+ b_k, \quad (8)$$

$$U_0 = \sum'_k (\epsilon_k - t_k - n_0 V_k),$$

где  $U_0$  – энергия основного состояния заряженного бозе-газа без учёта его взаимодействия с поляризацией кристалла. Таким образом, спектр возбуждений неидеального газа ТИ-биполяронов имеет вид:

$$E_k = E_{bp} + u_0 + \quad (9)$$

$$+ \left( \omega_0(\vec{k}) + \sqrt{k^4/4M_e^2 + k^2 V_k n_0 / M_e} \right) \times$$

$$\times (1 - \Delta_{k,0}),$$

где  $u_0 = U_0/N$ ,  $N$  – полное число частиц. Если отсчитывать энергию возбуждений от энергии основного состояния биполярона в неидеальном газе, полагая  $\Delta_k = E_k - (E_{bp} + u_0)$ , то для  $\Delta_k$  при  $k \neq 0$  получим:

$$\Delta_k = \omega_0(\vec{k}) + \sqrt{k^4/4M_e^2 + k^2V_k n_0/M_e}. \quad (10)$$

Полученный спектр означает, что ТИ-биполяронный газ имеет в спектре щель  $\Delta_k$  между основным и возбуждёнными состояниями, т.е. обладает сверхтекучестью. Будучи заряженным, такой газ автоматически будет сверхпроводящим. Для определения конкретного вида спектра необходимо знать величину  $V_k$ . Если бы мы рассматривали только заряженный бозе-газ с положительным однородным фоном, создаваемым жёстким ионным остовом, то входящая в (9) величина  $V_k$  в отсутствие экранировки была бы равна  $V_k = 4\pi e_B^2/k^2$ , соответственно, второй член в подкоренном выражении (9) был бы равен  $\omega_p^2 = 4\pi n_0 e_B^2/M_e$ , где  $\omega_p$  – плазменная частота бозонного газа,  $e_B$  – заряд бозона ( $2e$  – для ТИ-биполярона). В действительности, если учесть экранировку, то  $V_k$  примет вид  $V_k = 4\pi e^2/k^2 \epsilon_B(k)$ , где  $\epsilon_B(k)$  – диэлектрическая проницаемость заряженного бозе-газа, которая была вычислена в [22]-[23]. Полученное для  $\epsilon_B(k)$  в [22]-[23] выражение слишком громоздко и здесь не приводится. В рассматриваемом нами случае бозе-газа ТИ-биполяронов такая модификация  $V_k$ , однако, недостаточна. Как было показано в [12], биполяроны составляют лишь небольшую часть заряженных частиц в системе. Их основная доля приходится на электронный газ, в который погружены биполяроны. Именно электронный газ даёт основной вклад в экранировку взаимодействия между биполяронами. Для учёта такой экранировки для  $V_k$  нужно использовать выражение  $V_k = 4\pi e^2/k^2 \epsilon_B(k) \epsilon_e(k)$ , где  $\epsilon_e(k)$  – диэлектрическая проницаемость электронного газа. Наконец, если учесть подвижность ионного остова, то окончательно величина  $V_k$  примет вид:  $V_k = 4\pi e^2/k^2 \epsilon_B(k) \epsilon_e(k) \epsilon_\infty \epsilon_0$ , где  $\epsilon_\infty$ ,  $\epsilon_0$  – высокочастотная и статическая диэлектрические постоянные.

В результате для  $\Delta_k$  получим:

$$\Delta_k = \omega_0(\vec{k}) + k^2/2M_e \sqrt{1 + \chi(k)}, \quad (11)$$

$$\chi(k) = \omega_p^2/k^4 \epsilon_B(k) \epsilon_e(k) \epsilon_\infty \epsilon_0. \quad (12)$$

Для оценки величины  $\chi(k)$  в (11) рассмотрим длинноволновый предел. В этом пределе  $\epsilon_e(k)$  имеет томас-фермиевский вид:  $\epsilon_e(k) = 1 + \varkappa^2/k^2$ , где  $\varkappa = 0,815k_F(r_s/a_B)^{1/2}$ ,  $a_B = \hbar/M_e e_B^2$ ,  $r_s = (3/4\pi n_0)^{1/3}$ , соответственно, согласно [22]-[23], величина  $\epsilon_B(k)$  равна:  $\epsilon_B(k) = 1 + q_s^4/k^4$ ,  $q_s = \sqrt{2M_e \omega_p}$ . Учитывая, что при вычислении термодинамических функций основной

вклад дают значения  $k: k^2/2M_e \approx T$ , где  $T$  – температура, для величины  $\chi(k)$  получим оценку  $\chi \sim T/\epsilon_F \epsilon_\infty \epsilon_0$ , где  $\epsilon_F$  – энергия Ферми. Таким образом, спектр экранированного ТИ-биполярного газа мало отличается от спектра идеального газа ТИ-биполяронов (2).

Заметим, что в силу экранировки величина корреляционной энергии  $u_0$  в (10) оказывается много меньше, чем вычисленная без учёта экранировки в [21] и, для реальных значений параметров, много меньше, чем энергия биполярона  $|E_{bp}|$ . Отметим также, что в силу экранировки газ из ТИ-биполяронов не переходит в вигнеровский кристалл при сколь угодно малой плотности биполяронов.

### 3. Статистическая термодинамика газа ТИ-биполяронов низкой плотности

Согласно результатам §2, неидеальный бозе-газ ТИ-биполяронов почти не отличается от идеального.

Рассмотрим идеальный бозе-газ ТИ-биполяронов, представляющий собой систему из  $N$ -частиц, находящихся в объёме  $V$ . Обозначим через  $N_0$  число частиц в нижнем одночастичном состоянии, а через  $N'$  – число частиц в более высоких состояниях. Тогда:

$$N = \sum_{n=0,1,2,\dots} \bar{m}_n = \sum_n \frac{1}{e^{(E_n - \mu)/T} - 1}, \quad (13)$$

$$N = N_0 + N', \quad N_0 = \frac{1}{e^{(E_{bp} - \mu)/T} - 1}, \quad (14)$$

$$N' = \sum_{n_i \neq 0} \frac{1}{e^{(E_n - \mu)/T} - 1},$$

в этом разделе будем считать  $\omega_0$  не зависящей от  $k$ .

Заменяя в выражении для  $N'$  (14) суммирование на интегрирование по квазинепрерывному спектру и полагая в (14)  $\mu = E_{bp}$ , получим из (13), (14) уравнение для определения критической температуры бозе-конденсации  $T_c$ :

$$C_{bp} = f_{\tilde{\omega}} \left( \tilde{T}_c \right), \quad (15)$$

$$f_{\tilde{\omega}} \left( \tilde{T}_c \right) = \tilde{T}_c^{3/2} F_{3/2} \left( \tilde{\omega}/\tilde{T}_c \right),$$

$$F_{3/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^{1/2} dx}{e^{x+\alpha} - 1},$$

$$C_{bp} = \left( \frac{n^{2/3} 2\pi \hbar^2}{M_e \omega^*} \right)^{3/2},$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\omega_0}{\omega^*}, \quad \tilde{T}_c = \frac{T_c}{\omega^*},$$

где  $n = N/V$ . Связь обозначения  $F_{3/2}$  с другими обозначениями дана в приложении. На рис. 1 приведено графическое решение уравнения (15) для значений параметров  $M_e = 2m^* = 2m_0$ , где  $m_0$  – масса свободного электрона в вакууме,  $\omega^* = 5$  мэВ ( $\approx 58$ К),  $n = 10^{21}$  см $^{-3}$  и значений:  $\tilde{\omega}_1 = 0, 2$ ;  $\tilde{\omega}_2 = 1$ ;  $\tilde{\omega}_3 = 2$ ;  $\tilde{\omega}_4 = 10$ ,  $\tilde{\omega}_5 = 15$ ,  $\tilde{\omega}_6 = 20$ .

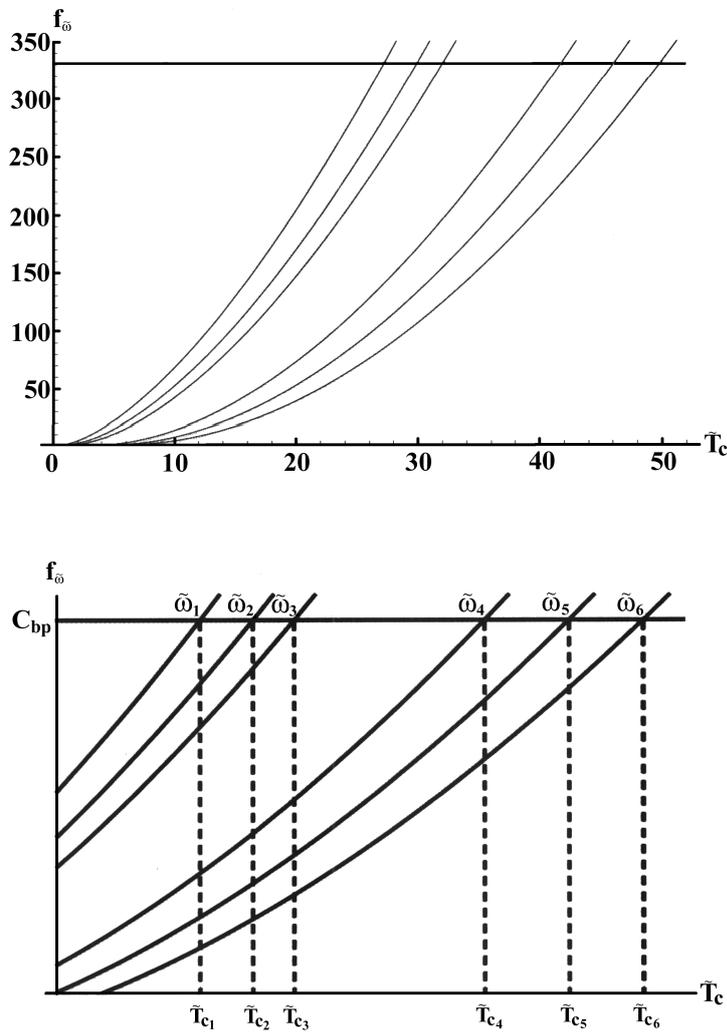


Рис. 1. Решения уравнения (15) с  $C_{bp} = 331, 3$  и  $\tilde{\omega}_i = \{0, 2; 1; 2; 10; 15; 20\}$ , которым соответствуют  $\tilde{T}_{c_i}$ :  $\tilde{T}_{c_1} = 27, 3$ ;  $\tilde{T}_{c_2} = 30$ ;  $\tilde{T}_{c_3} = 32$ ;  $\tilde{T}_{c_4} = 42$ ;  $\tilde{T}_{c_5} = 46, 2$ ;  $\tilde{T}_{c_6} = 50$ .

Из рис. 1 следует, что критическая температура растёт с ростом фоновой частоты  $\omega_0$ . Соответствующие выбранным значениям параметров отношения критических температур  $T_{c_i}/\omega_{0i}$  приведены в таблице I.

Таблица I. Рассчитанные значения характеристик бозе-газа  
ТИ-биполяронов с концентрацией  $n = 10^{21} \text{ см}^{-3}$

i	0	1	2	3	4	5	6
$\tilde{\omega}_i$	0	0,2	1	2	10	15	20
$T_{ci}/\omega_{oi}$	$\infty$	136,6	30	16	4,2	3	2,5
$q_i/T_{ci}$	1,3	1,44	1,64	1,8	2,5	2,8	3
$-\Delta(\partial C_{v,i}/\partial \tilde{T})$	0,11	0,12	0,12	0,13	0,14	0,15	0,15
$C_{v,i}(T_c - 0)$	1,9	2,16	2,46	2,7	3,74	4,2	1,6
$(C_s - C_n)/C_n$	0	0,16	0,36	0,52	1,23	1,53	1,8
$n_{bpi} \cdot \text{см}^3$	$16 \cdot 10^{19}$	$9,4 \cdot 10^{18}$	$4,2 \cdot 10^{18}$	$2,0 \cdot 10^{18}$	$1,2 \cdot 10^{17}$	$5,2 \cdot 10^{14}$	$2,3 \cdot 10^{13}$

Из таблицы I следует вывод о том, что критическая температура ТИ-биполяронного газа всегда выше, чем в случае идеального бозе-газа (ИБГ). Из рис. 1 также следует, что увеличение концентрации ТИ-биполяронов  $n$  будет приводить к увеличению критической температуры, а увеличение массы электрона  $m^*$  – к её снижению. При  $\tilde{\omega} = 0$  результаты переходят в известный предел ИБГ. В частности, из (15) при  $\tilde{\omega} = 0$  следует выражение для критической температуры ИБГ:

$$T_c = 3,31 \hbar^2 n^{2/3} / M_e \quad (16)$$

Подчеркнём, однако, что в (16) входит  $M_e = 2m^*$ , а не масса биполярона. Это снимает проблему низкой температуры конденсации, возникающей как в теории ПМР, так и в теории ПБР, в которых в выражении (16) фигурирует масса биполярона [24]-[27]. Другой важный результат состоит в том, что критическая температура  $T_c$  для выбранных значений параметров значительно превосходит энергию щели  $\omega_0$ .

Из (13), (14) следует, что:

$$\frac{N'(\tilde{\omega})}{N} = \frac{\tilde{T}^{3/2}}{C_{bp}} F_{3/2} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right), \quad (17)$$

$$\frac{N_0(\tilde{\omega})}{N} = 1 - \frac{N'(\tilde{\omega})}{N}. \quad (18)$$

На рис. 2 приведены температурные зависимости числа надконденсатных частиц  $N'$  и числа частиц, находящихся в конденсате  $N_0$ , для вышеуказанных значений параметров  $\tilde{\omega}_i$ .

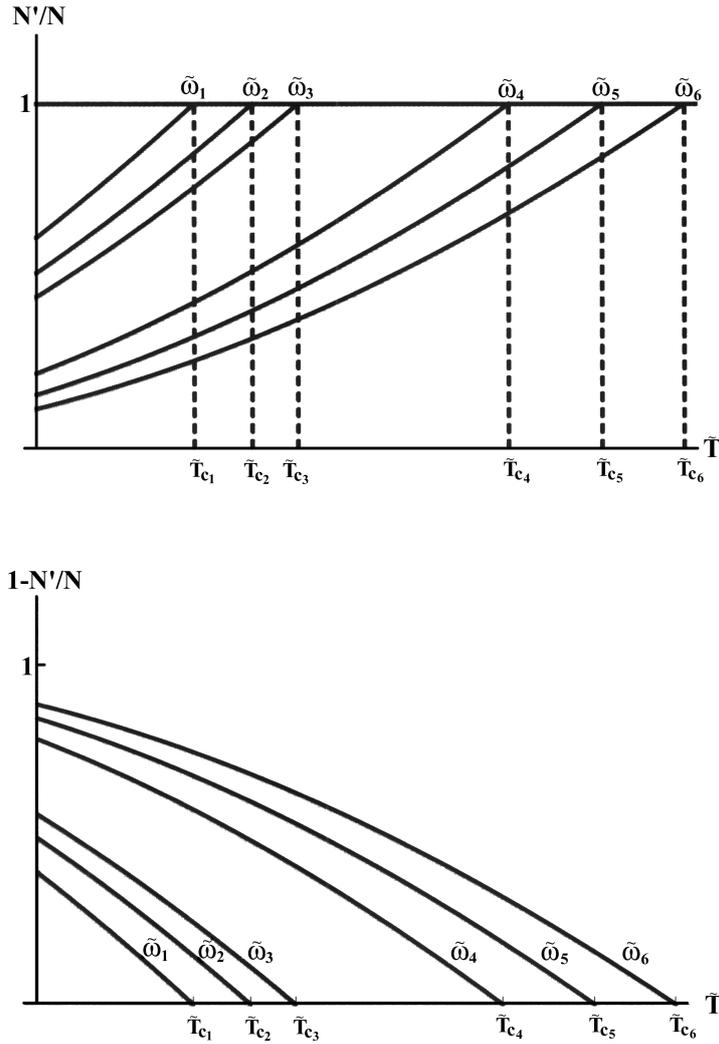


Рис. 2. Температурные зависимости относительного числа надконденсатных частиц  $N'/N$  и частиц, находящихся в конденсате  $N_0/N = 1 - N'/N$ , для значений параметров  $\tilde{\omega}_i$ , приведённых на рис. 1.

Из рис. 2 следует, что, как и следовало ожидать, число частиц в конденсате растёт с увеличением щели  $\omega_i$ .

Энергия ТИ-биполярного газа  $E$  определяется выражением:

$$E = \sum_{n=0,1,2,\dots} \bar{m}_n E_n = E_{bp} N_0 + \sum_{n \neq 0} \bar{m}_n E_n. \quad (19)$$

С использованием (14), (15) для удельной энергии (т.е. энергии, приходящейся на один ТИ-биполярон)  $\tilde{E}(\tilde{T}) = E/N\omega^*$ ,  $\tilde{E}_{bp} = E_{bp}/\omega^*$  из (19) получим:

$$\tilde{E}(\tilde{T}) = \tilde{E}_{bp} + \frac{\tilde{T}^{5/2}}{C_{bp}} F_{3/2} \left( \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) \left[ \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} + \frac{F_{5/2} \left( \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right)}{F_{3/2} \left( \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right)} \right], \quad (20)$$

$$F_{5/2}(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^{3/2} dx}{e^{x+\alpha} - 1},$$

где  $\tilde{\mu}$  определяется из уравнения:

$$\tilde{T}^{3/2} F_{3/2} \left( \frac{\tilde{\omega} - \tilde{\mu}}{\tilde{T}} \right) = C_{bp}, \quad (21)$$

$$\tilde{\mu} = \begin{cases} 0, & \tilde{T} \leq \tilde{T}_c; \\ \tilde{\mu}(\tilde{T}), & \tilde{T} \geq \tilde{T}_c. \end{cases}$$

Связь  $\tilde{\mu}$  с химическим потенциалом системы  $\mu$  даётся соотношением  $\tilde{\mu} = (\mu - E_{bp})/\omega^*$ . Из (20)-(21) также следуют выражения для свободной энергии:  $\Delta F = -\frac{2}{3}\Delta E$ ,  $\Delta F = F - E_{bp}N$ ,  $\Delta E = E - E_{bp}N$  и энтропии  $S = -\partial F/\partial T$ .

На рис. 3 приведены температурные зависимости  $\Delta\tilde{E} = \tilde{E} - \tilde{E}_{bp}$  для вышеуказанных значений параметров  $\tilde{\omega}_i$ . Точки излома на кривых  $\Delta\tilde{E}_i(\tilde{T})$  соответствуют значениям критических температур  $T_{c_i}$ .

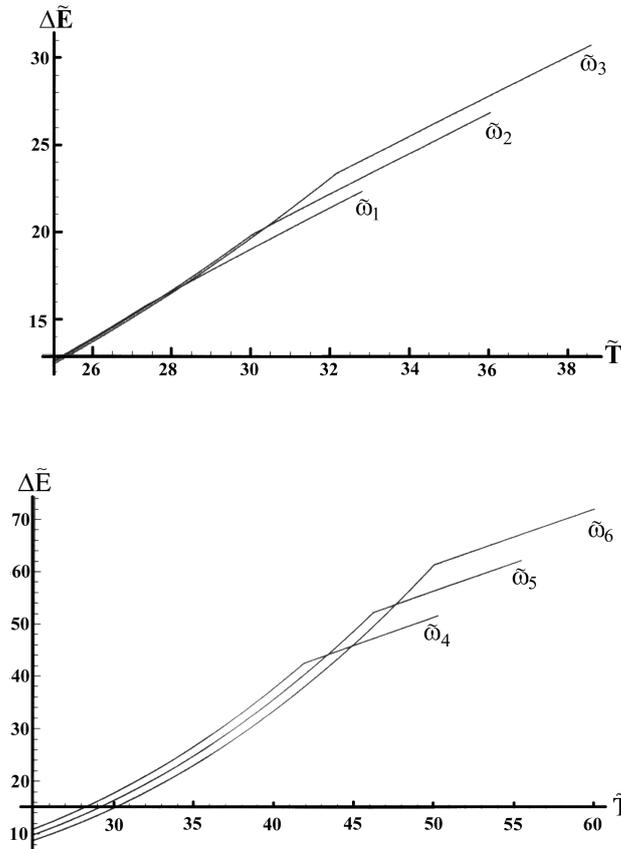


Рис. 3. Температурные зависимости  $\Delta\tilde{E}(\tilde{T}) = \tilde{E}(\tilde{T}) - \tilde{E}_{bp}$  для значений параметров  $\tilde{\omega}_i$ , приведённых на рис. 1, 2.

Полученные зависимости позволяют найти теплоёмкость ГИ-биполярного газа:  $C_v(\tilde{T}) = d\tilde{E}/d\tilde{T}$ . Из (20) для  $C_v(\tilde{T})$  при  $\tilde{T} \leq \tilde{T}_c$  получим:

$$\begin{aligned}
C_v(\tilde{T}) &= \frac{\tilde{T}^{3/2}}{2C_{bp}} \left[ \frac{\tilde{\omega}^2}{\tilde{T}^2} F_{1/2} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) + \right. \\
&+ 6 \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) F_{3/2} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) + \left. 5 F_{5/2} \left( \frac{\tilde{\omega}}{\tilde{T}} \right) \right], \\
F_{1/2}(\alpha) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{dx}{e^{x+\alpha} - 1}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Из (22) следует известная экспоненциальная зависимость теплоёмкости при низких температурах  $C_v \sim \exp(-\omega_0/T)$ , обусловленная наличием энергетической щели  $\omega_0$ .

На рис. 4 приведены температурные зависимости теплоёмкости  $C_v(\tilde{T})$  для вышеуказанных значений параметров  $\tilde{\omega}_i$ . В таблице I для значений параметров  $\tilde{\omega}_i$  приведены величины скачков теплоёмкости:

$$\Delta \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial \tilde{T}} = \left. \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial \tilde{T}} \right|_{\tilde{T}=\tilde{T}_c+0} - \left. \frac{\partial C_v(\tilde{T})}{\partial \tilde{T}} \right|_{\tilde{T}=\tilde{T}_c-0} \tag{23}$$

в точках перехода.

Полученные зависимости позволяют найти скрытую теплоту перехода  $q = TS$ , где  $S$  – энтропия надконденсатных частиц. В точке перехода эта величина равна:  $q = 2T_c C_v(T_c - 0)/3$ , где  $C_v(T)$  определяется формулой (22), и для вышеуказанных значений параметров  $\omega_i$  приведена в Таблице I.

Полученные результаты могут быть обобщены на случай неидеально-го заряженного бозе-газа заменой в формулах этого раздела величины  $E_{bp}$  на  $E_{bp} + u_0$  и величины  $M$  на  $M\sqrt{1 + \chi}$ . Результаты могут быть также обобщены на случай, когда  $\omega_0(k)$  имеет дисперсию вида  $\omega_0(k) = \omega_0(0) + \beta k^2$ . В этом случае во всех выражениях этого раздела нужно заменить  $\omega_0$  на  $\omega_0(0)$  и  $1/(2M_e)$  на  $\beta + 1/(2M_e)$ .

## 4. Сравнение с экспериментом

Успех теории БКШ связан с успешным объяснением ряда экспериментов в обычных металлических сверхпроводниках, в которых ЭФВ не является сильным. Есть основание считать ЭФВ в высокотемпературных керамических СП достаточно сильным [24]-[26], и для них теория БКШ плохо применима. В этом случае может быть полезным использование описания свойств ВТСП на основе теории биполярнонов. Как известно, специально построенная для описания СП с сильным ЭФВ теория Элиашберга [27] неприменима к описанию биполяронных состояний [4]-[5]. Перечислим

некоторые эксперименты по ВТСП, которые находятся в соответствии с ТИ-биполярной теорией.

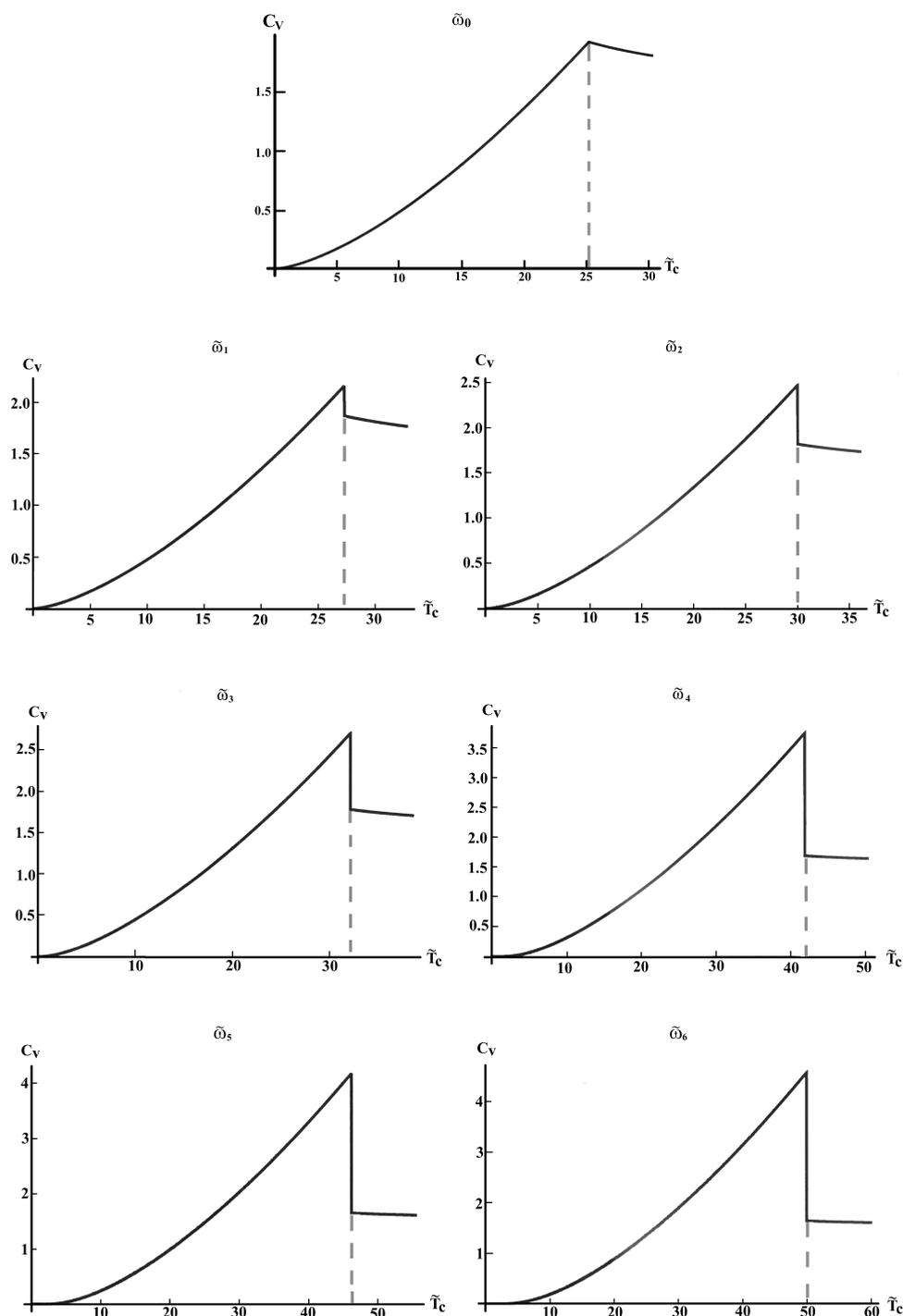


Рис. 4. Температурные зависимости теплоёмкости для различных

значений параметров  $\omega_i$ :  $\omega_0 = 0$ ;  $\tilde{T}_{C_0} = 25, 2$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c1}) = 2$ ;  
 $\omega_1 = 0, 2$ ;  $\tilde{T}_{C_1} = 27, 3$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c1} - 0) = 2, 16$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c1} + 0) = 1, 9$ ;  
 $\omega_2 = 1$ ;  $\tilde{T}_{C_2} = 30$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c2} - 0) = 2, 46$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c2} + 0) = 1, 8$ ;  
 $\omega_3 = 2$ ;  $\tilde{T}_{C_3} = 32, 1$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c3} - 0) = 2, 7$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c3} + 0) = 1, 78$ ;  
 $\omega_4 = 10$ ;  $\tilde{T}_{C_4} = 41, 9$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c4} - 0) = 3, 7$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c4} + 0) = 1, 7$ ;  
 $\omega_5 = 15$ ;  $\tilde{T}_{C_5} = 46, 2$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c5} - 0) = 4, 2$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c5} + 0) = 1, 65$ ;  
 $\omega_6 = 20$ ;  $\tilde{T}_{C_6} = 50$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c6} - 0) = 4, 6$ ;  $C_v(\tilde{T}_{c6} + 0) = 1, 6$ .

Согласно основным имеющимся на сегодняшний день теориям СП (БКШ, RVB, t-J теориям [9], [13]), при низких температурах все носители тока должны быть спарены (т.е. плотность сверхпроводящих электронов совпадает со сверхтекучей плотностью). В недавних экспериментах по передопированным СП [28] было показано, что это не так – лишь небольшая часть носителей тока оказалась в спаренном состоянии. Анализ этой ситуации, проведённый в [29], показывает, что полученные в [28] результаты не вписываются в существующие теоретические конструкции. Разработанная в данной статье ТИ-биполярная теория СП даёт ответ на вопрос работы [29] – куда исчезла бóльшая часть электронов в исследованных сверхпроводниках? Он состоит в том, что лишь небольшая часть электронов  $n_{bp}$ :  $n_{bp} \ll nE_{bp}/\epsilon_F \ll n$ , находящихся вблизи поверхности Ферми, оказываются спаренными и определяют сверхпроводящие свойства ВТСП материалов.

В действительности, однако, развитая в данной работе теория ЭФВ применима для недодопированных СП и плохо применима для описания экспериментов с передопированными образцами, использованными в [28]. В частности, мы не можем ожидать в недодопированных образцах линейной зависимости критической температуры от плотности СП электронов, наблюдавшейся в [28]. Скорее эта зависимость будет нелинейной, как это следует из уравнения (15).

Для описания передопированного режима недавно была построена теория [30], основанная на идее Ферми-конденсации, разработанной в [31], являющаяся обобщением теории БКШ, в которой было показано, что число СП носителей тока составляет лишь малую часть их общего числа, что находится в соответствии с результатами [28].

Таким образом, мы можем заключить, что результаты, полученные в [28], являются весьма общими и имеют место как в передопированном, так и в недодопированном случае (см. также [32]).

Мы также можем ожидать линейной зависимости сопротивления от  $T$  при  $T > T_c$  как в передопированном, так и в недодопированном случае, поскольку число биполярнонов мало по сравнению с полным числом электронов, если ЭФВ является доминирующим, а кристалл – изотропным.

В противоположность работе [30] в недавней работе [33] было показано, что линейная зависимость  $T_c$  от числа куперовских пар, наблюдавшаяся в [28] по передопированным  $La_{2-x}Sr_xCu_2O$  кристаллам, может быть объяснена с точки зрения БКШ, если основываться на плазмонном механизме СП. Тем не менее, представляется, что специальный случай, рассмотренный в [33], не может объяснить общий характер результатов, полученный в [28].

Вопрос о несоответствии БКШ результатам [28] также рассматривался в недавней работе [34], в которой разработана простая модель биполярно-

ной СП и было показано, что число биполярных носителей тока должно быть мало по сравнению с полным числом электронов. Результаты, полученные в [34], подтверждают наши результаты о малой доле спаренных состояний в пределе низких температур.

На рис. 3 показаны типичные зависимости  $E(\tilde{T})$ . Из них следует, что в точке перехода энергия является непрерывной функцией  $\tilde{T}$ . Это означает, что на сам переход энергию затрачивать не надо и переход является фазовым переходом 2-го рода в полном соответствии с экспериментом. В то же время переход бозе-частиц из конденсатного состояния в надконденсатное связан с энергозатратами, которые определяются величиной  $q$  (§3, Таблица I), определяющей скрытую теплоту перехода бозе-газа, что делает такой переход фазовым переходом 1-го рода.

Рассмотрим в качестве примера ВТСП  $YBa_2Cu_3O_7$  (YBCO) с температурой перехода  $90 \div 93$  К, объёмом элементарной ячейки  $0,1734 \cdot 10^{-21} \text{ см}^{-3}$ , концентрацией дырок  $n \approx 10^{21} \text{ см}^{-3}$ . Согласно оценкам [35], энергия Ферми равна  $\epsilon_F = 0,37$  эВ. Концентрацию ТИ-биполяронов в  $YBa_2Cu_3O_7$  найдём из уравнения (15):

$$\frac{n_{bp}}{n} C_{bp} = f_{\tilde{\omega}}(\tilde{T}_c) \quad (24)$$

с  $\tilde{T}_c = 1,6$ . В Таблице I приводятся значения  $n_{bp,i}$  для значений параметров  $\tilde{\omega}_i$ , приведённых в §2. Из Таблицы I следует, что  $n_{bp,i} \ll n$ . Таким образом, только малая часть носителей тока находится в биполярном состоянии. Отсюда следует, в полном соответствии с результатами предыдущего раздела, что кулоновское взаимодействие биполяронов будет заэкранировано неспаренными электронами, что оправдывает рассматриваемое нами приближение невзаимодействующего газа ТИ-биполяронов.

Согласно излагаемому подходу, для возникновения СП необходимо образование спаренных состояний. Условие образования таких состояний вблизи поверхности Ферми, согласно [20], имеет вид:  $E_{bp} < 0$ . Соответственно, величина псевдощели, согласно результатам §2, будет равна:

$$\Delta_1 = |E_{bp} + u_0|. \quad (25)$$

Естественно, эта величина не зависит от вектора  $\vec{k}$ , но зависит от концентрации носителей тока, т.е. от уровня допирования.

В изложенном простейшем варианте теории СП щель  $\omega_0$  не изменяется при переходе из конденсированного в неконденсированное состояние, т.е. при переходе из сверхпроводящего в несверхпроводящее состояние и, стало быть,  $\omega_0$  имеет смысл также и псевдощели:

$$\Delta_2 = \omega_0(\vec{k}), \quad (26)$$

которая зависит от волнового вектора  $\vec{k}$ .

Многочисленные дискуссии о проблеме щели и псевдощели исходят из утверждения, что энергетическая щель в ВТСП определяется энергией связи куперовских пар, что приводит к неразрешимым противоречиям (см. обзоры [36]-[40], посвящённые этой проблеме).

В действительности величина СП щели  $\Delta_2$  (26), вообще говоря, не имеет никакого отношения к энергии спаренных состояний, которая определяется  $E_{bp}$ . Так, согласно [12], как при малых значениях константы ЭФВ  $\alpha$ , так и при больших  $\alpha$   $|E_{bp}| \sim \alpha^2 \omega_0$ , т.е.  $|E_{bp}|$  вообще не зависит от  $\omega_0$ .

Так, например, в рамках излагаемой нами концепции становится очевидным ответ на вопрос, почему псевдощель ( $\Delta_2$ ) имеет ту же анизотропию, что и СП щель – это одна и та же щель. Очевидным становится также ответ на вопрос, почему щель и псевдощель слабо зависят от температуры. В частности, понятным становится, почему при СП переходе щель возникает сразу и не обращается в ноль при  $T = T_c$  (не БКШ поведение). Часто дискутируемый вопрос, какой параметр порядка следует сопоставить псевдощелевой фазе (т.е. является ли псевдощелевая фаза отдельным состоянием материи [37]), в рамках изложенной теории представляется лишённым смысла.

В настоящее время существует много методов измерения щели: фотоэмиссионная спектроскопия с угловым разрешением (ARPES), рамановская (комбинационная) спектроскопия, туннельная сканирующая спектроскопия, магнитное нейтронное рассеяние и др. Согласно [40], для максимальной величины щели  $YBCO$  (6.6) (в антинодальном направлении в аб-плоскости) было получено  $\Delta_1/T_c \approx 16$ . Это даёт для  $|E_{bp}| \approx 80$  мэВ.

Определим теперь характерную энергию фононов, ответственных за образование ТИ-биполяронов и сверхпроводящих свойств оксидных керамик, т.е. величину СП щели  $\Delta_2$ . С этой целью воспользуемся сравнением рассчитанных значений скачков теплоёмкостей с экспериментальными данными (рис. 5).

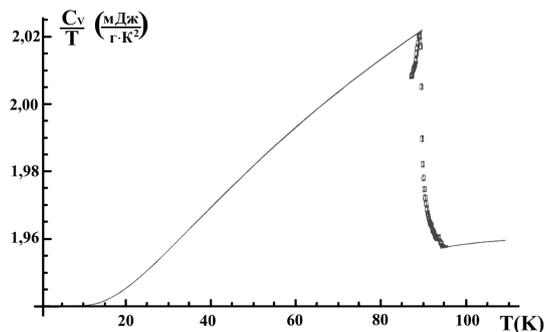


Рис. 5. Сравнение теоретической (сплошная линия) и экспериментальной (прерывистая линия) зависимостей в области скачка теплоёмкости.

Как следует из рис. 5, скачок теплоёмкости, вычисленный теоретически (§3), совпадает с экспериментальными значениями в  $YBa_2Cu_3O_7$  [41] при  $\tilde{\omega} = 1,5$ , т.е. при  $\omega = 7,5$  мэВ. Это соответствует концентрации ТИ-биполяронов  $n_{bp} = 2,6 \cdot 10^{18} \text{см}^{-3}$ . С учётом того, что  $|E_{bp}| \approx 0.44\alpha^2\omega$  [11],  $|E_{bp}| = 80$  мэВ,  $\omega = 7,5$  мэВ для константы ЭФВ  $\alpha$  получим:  $\alpha \approx 5$ , что заведомо лежит за пределами применимости БКШ.

Наличие щели  $\omega_0$  в ВТСП керамиках доказывается многочисленными спектроскопическими экспериментами (ARPES) по угловой зависимости  $\omega_0$  от  $\vec{k}$  при малых  $|\vec{k}|$  [36]-[40]. Наличие d-симметрии в угловой зависимости  $\omega_0(\vec{k})$ , по-видимому, связано с появлением псевдощели и перестройкой Ферми системы в систему Ферми-дуг, обладающую d-симметрией. В экспериментах по туннельной спектроскопии величина  $\omega_0$  может проявлять себя как наличие субщелевой структуры на фоне измерения псевдощели  $\Delta_1$  ( $\Delta_1 \gg \omega_0$ ). Такая структура неоднократно наблюдалась в оптимально допированных  $YBa_2Cu_3O_7$  и  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$  (ВССО) в области  $5 \div 10$  мэВ [42]-[44], что совпадает с вышеприведённой оценкой  $\omega_0$ .

Большую совокупность экспериментов составляет измерение зависимости величины щели и псевдощели от уровня допирования  $x$ . Уже ранние эксперименты по изучению магнитной восприимчивости и найтовского сдвига выявили наличие псевдощели, появляющейся при  $T^* > T_c$ . Последующие многочисленные эксперименты выявили особенности  $T - x$  фазовой диаграммы:  $T^*$  увеличивается, а  $T_c$  уменьшается при уменьшении допирования [36]-[40]. Как показано в [20], такое поведение можно объяснить особенностями существования биполяронов в поляроном газе [20]. В [20] также отмечается возможно общий характер 1/8 аномалии в ВТСП системах.

В заключении этого раздела отметим, что многолетняя дискуссия о природе щели и псевдощели в ВТСП материалах во многом связана с методологической проблемой измерения, когда различные методы измерения в действительности измеряют не одно и то же, а совершенно разные величины. В рассматриваемом нами случае ARPES измеряет  $\omega_0(\vec{k})$ , в то время как туннельная спектроскопия – величину  $|E_{bp}|$ . В этой области, к сожалению, остаётся ещё очень большое число нерешённых вопросов, представляющих вызов как для теории, так и для эксперимента.

## 5. Обсуждение результатов

Рассмотренная выше теория ТИ-биполярной СП, как и теория БКШ, основывается на гамильтониане Фрёлиха. Эти теории, однако, имеют противоположные области применимости. В теории БКШ ЭФВ считается слабым, соответственно корреляционная длина, т.е. характерный размер пары  $l_{corr} \gg n_{bp}^{-1/3}$ . Величина  $n_{bp}$ , концентрация биполяронов (т.е. куперов-

ских пар), в БКШ очень велика и при  $T = 0$  совпадает с концентрацией носителей в металле.

В рассматриваемой теории ЭФВ считается сильным, соответственно корреляционная длина  $l_{corr} \ll n_{bp}^{-1/3}$ . При этом концентрация биполяронов, даже при  $T = 0$ , составляет лишь малую долю полного числа носителей тока. Эта ситуация реализуется в оксидных керамиках. Понятие пары в ТИ-биполяронной теории в этих условиях оказывается хорошо определённым. Так, согласно [2], величина корреляционной длины для ТИ-биполярона равна  $l_{corr} = \hbar^2 \tilde{\epsilon} x(\eta) / e^2 M_e$ , где  $x(\eta)$ , ( $\eta = \epsilon_\infty / \epsilon_0$ ) меняется в области стабильности биполяронных состояний в пределах  $6 \div 10$  и для значений параметров, соответствующих  $YBCO$ , составляет  $l_{corr} \approx 10^{-7}$  см, в то время как  $n_{bp}^{-1/3} \approx 10^{-6}$  см. Таким образом:  $n_{bp} l_{corr}^3 \sim 10^{-3} \ll 1$ , т. е. отдельные пары практически не перекрываются друг с другом.

Из полученных результатов следует, что для повышения критической температуры  $T_c$  следует либо уменьшать эффективную массу носителей тока, либо увеличивать фононную частоту  $\omega_0$ , либо увеличивать концентрацию биполяронов  $n_{bp}$ . Таким образом, проблема повышения  $T_c$  связана с поиском кристаллов, обладающих оптимальным значением параметров. Отметим, что повышение  $\omega_0$  не непременно будет приводить к увеличению  $T_c$ , поскольку увеличение  $\omega_0$  приводит к уменьшению константы ЭФВ  $\alpha$ . При малых  $\alpha$  мы приходим к области применимости теории БКШ, которая даёт низкие  $T_c$ . Такая ситуация, возможно, реализуется при наблюдении антикорреляционной зависимости  $T_c$  от  $\omega_0$  [45].

Наиболее эффективным способом изменения концентрации  $n_{bp}$  является изменение уровня допирования. При этом изменяются как концентрация носителей тока  $n$ , так и концентрация  $n_{bp}$ . Зависимость  $n_{bp}(n)$  может быть весьма сложной: в частности, увеличение  $n$  не обязательно приводит к увеличению  $n_{bp}$  [20].

Для увеличения концентрации биполяронов можно приложить внешнее давление. Увеличение давления приводит к уменьшению объёма кристалла и, соответственно, к увеличению концентрации  $n_{bp}$ , уменьшению эффективной массы носителей тока и увеличению фононной частоты  $\omega_0$ .

Эффективным методом повышения  $T_c$  может быть использование неоднородного допирования. Так, в проводе с цилиндрической симметрией допирование с максимальной концентрацией акцепторов на оси цилиндра будет приводить к повышенной концентрации биполяронов вдоль оси цилиндра, поскольку бозе-газ будет концентрироваться в областях с минимальной потенциальной энергией.

Сделанные выводы совершенно не учитывают многие важные факторы. Рассмотрение только ЭФВ не соответствует реальной ситуации, поскольку в ВТСП материалах важную роль играет наличие магнитного порядка. Так, например, во многих работах наличие псевдощели связывает

ся не с ЭФВ, а с наличием магнитных флуктуаций [46]. Учёт других взаимодействий, например электрон-плазмонного взаимодействия, также может конкурировать с ЭФВ.

Рассматриваемая теория, как и БКШ, основана на изотропной 3D модели. В действительности большинство купратов являются слоистыми структурами, обладающими высокой степенью анизотропии. Обобщение теории на этот случай представляется весьма актуальным. Ситуация осложняется тем, что в реальных ВТСП материалах огромную роль играют неоднородности, например страйпы и кластерные образования. В частности, наличие страйпов приводит к выводу о возможно 1D механизме СП в оксидных керамиках. ТИ-биполярный механизм приводит в этом случае к возможности существования бозе-конденсата в одномерных системах и, как следствие, к новым возможностям — получению ВТСП в материалах с длинными страйпами [47].

Перечислим основные выводы, вытекающие из последовательного трансляционно-инвариантного рассмотрения ЭФВ. Спаривание электронов при любой константе связи, основанное на таком рассмотрении, приводит к представлению о ТИ-поляронах и ТИ биполяронах. Будучи бозонами, ТИ-биполярны могут испытывать бозе-конденсацию, приводящую к сверхпроводимости. Перечислим основные результаты, к которым приводит такой подход. Прежде всего, изложенная теория снимает проблему большой величины эффективной массы биполяронов (§3). Как следствие, снимаются формальные ограничения на величину критической температуры перехода. Теория количественно объясняет такие термодинамические свойства ВТСП, как наличие (§3) и величину (§4) скачка теплоёмкости, отсутствующего в теории бозе-конденсации идеального газа. Теория объясняет наличие большого отношения ширины псевдощели к  $T_c$  (§4). Теория объясняет небольшую величину корреляционной длины [2]. Теория объясняет наличие в ВТСП материалах щели и псевдощели (§3, 4). Естественное объяснение получает угловая зависимость щели и псевдощели (§4).

Соответственно, изотопический эффект автоматически вытекает из выражения (13), в котором в качестве щели фигурирует фононная частота  $\omega_0$ . Применение теории к 1D и 2D системам приводит к качественно новым результатам, поскольку наличие щели в спектре ТИ-биполярона автоматически снимает расходимости при малых импульсах, присущих теории идеального бозе-газа [47].

## 6. Приложение. Замечание об обозначениях

Функция  $F_{3/2}(\alpha)$  называется полилогарифм  $= Li_{3/2}(e^{-\alpha})$ , в математике это функция *PolyLog*, так что функция  $f_{\tilde{\omega}}$  в (15) будет:

$$f_{\tilde{\omega}} = \tilde{T}^{3/2} PolyLog \left[ 3/2, e^{-\tilde{\omega}/\tilde{T}} \right].$$

В общем случае функция *PolyLog* порядка  $s$  определяется как:

$$PolyLog [s, e^{-\alpha}] = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^{t+\alpha} - 1} dt,$$

где  $\Gamma(s)$  – гамма-функция:  $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$ ,  $\Gamma(5/2) = 3\sqrt{\pi}/4$ .

Соответственно, встречающиеся в тексте функции  $F_{1/2}$ ,  $F_{3/2}$ ,  $F_{5/2}$  будут:

$$\begin{aligned} F_{1/2} &= 2PolyLog \left[ 1/2, e^{-\tilde{\omega}/\tilde{T}} \right]; \\ F_{3/2} &= PolyLog \left[ 3/2, e^{-\tilde{\omega}/\tilde{T}} \right]; \\ F_{5/2} &= 3/2PolyLog \left[ 5/2, e^{-\tilde{\omega}/\tilde{T}} \right]. \end{aligned}$$

## Библиографический список

1. В.Д. Лахно, Энергия и критическое значение параметра ионной связи трёхмерного биполярона большого радиуса, ЖЭТФ, **137**, 926, (2010)
2. V.D. Lakhno, Translation-invariant bipolarons and the problem of high-temperature superconductivity, Sol. St. Comm., **152**, 621, (2012)
3. В.Д. Лахно, Трансляционно-инвариантная теория полярона (биполярона) и проблема квантования в окрестности классического решения, ЖЭТФ, **143**, 1033, (2013)
4. A.S. Alexandrov, Theory of Superconductivity from weak to strong coupling, IOP publishing, Bristol, UK (2003)
5. A.S. Alexandrov, N.F. Mott, Bipolarons, Rep. Progr. Phys., **57**, 1197, (1994)
6. C. Chen, J. Avila, E. Frantzeskakis, A. Levy, M. Asensio, Observation of a two-dimensional liquid of Fröhlich polarons at the bare  $SrTiO_3$  surface, Nature Communications, **6**, 8585, (2015)
7. C. Cancellieri, A.S. Mishchenko, U. Aschauer, et al., Polaronic metal state at the  $LaAlO_3/SrTiO_3$  interface, Nature Communications, **7**, 10386, (2016)

8. Z. Wang, S. McKeown Walker, A. Tamai et al, Tailoring the nature and strength of electron–phonon interactions in the  $SrTiO_3(001)$  2D electron liquid, *Nature materials*, **15**, 835, (2016)
9. J. Bardeen, L.N. Cooper, J.R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, *Phys. Rev.*, **108**, 1175, (1957)
10. Н.Н. Боголюбов, К теории сверхтекучести, *Изв. АН СССР, Сер. физ.*, **11**, 77, (1947)
11. В.Д. Лакно, Анзац Пекара и проблема сильной связи в теории полярона, *УФН*, **185**, 317, (2015)
12. V.D. Lakhno, Phonon interaction of electrons in the translation-invariant strong-coupling theory, *Mod. Phys. Lett. B*, **30**, 1650031, (2016)
13. P.W. Anderson, *Science*, **235**, 1196, (1987); *The Theory of Superconductivity in the High- $T_c$  Cuprates*. Princeton, New Jersey, Princeton University Press, (1997)
14. P.W. Anderson, Condensed matter: the continuous revolution, *Physics World*, **8**(12), 37, (1995)
15. N.F. Mott, High-temperature superconductivity debate heats up, *Physics World*, **9**(1), 16, (1996)
16. P.W. Anderson, reply to N.F. Mott, *Physics World*, **9**(1), 16, (1996)
17. E.V.L. de Mello, J. Ranninger, Dynamical properties of small polarons, *Phys. Rev. B*, **55**, 14872, (1997)
18. Yu.A. Firsov, V.V. Kabanov, E.K. Kudinov, A.S. Alexandrov, Comment on "Dynamical properties of small polarons *Phys. Rev. B*, **59**, 12132, (1999)
19. E.V.L. de Mello, J. Ranninger, Reply to "Comment on 'Dynamical properties of small polarons' *Phys. Rev. B*, **59**, 12135, (1999)
20. V.D. Lakhno, Peculiarities in the concentration dependence of the superconducting transition temperature in the bipolaron theory of Cooper pairs, *Mod. Phys. Lett. B*, **31**, 1750125, (2017)
21. L. Foldy, Charged Boson Gas, *Phys. Rev. B*, **124**, 649, (1961)
22. S.R. Hore, N.E. Frankel, Dielectric response of the charged Bose gas in the random-phase approximation, *Phys. Rev. B*, **12**, 2619, (1975)

23. S.R. Hore, N.E. Frankel, Zero-temperature dielectric response of the charged Bose gas in a uniform magnetic field, *Phys. Rev. B*, **14**, 1952, (1976)
24. W. Meevasana, T.P. Devereaux et al., Calculation of overdamped c-axis charge dynamics and the coupling to polar phonons in cuprate superconductors, *Phys. Rev. B*, **74**, ID 174524, (2006)
25. W. Meevasana, N.J.C. Ingle, D.H. Lu et al., Doping Dependence of the Coupling of Electrons to Bosonic Modes in the Single-Layer High-Temperature  $Bi_2Sr_2CuO_6$  Superconductor, *Phys. Rev. Lett.*, **96**, ID 157003, (2006)
26. A.S. Mishchenko, N. Nagaosa, et al., *Phys. Rev. Lett.*, **100**, ID 166401, (2008)
27. Г.М. Элиашберг, Взаимодействие электронов с колебаниями решетки в сверхпроводнике, *ЖЭТФ*, **38**, 966, (1960)
28. I. Božović, X. He, et al., Dependence of the critical temperature in overdoped copper oxides on superfluid density, *Nature*, **536**, 309, (2016)
29. J. Zaanen, Condensed-matter physics: Superconducting electrons go missing, *Nature*, **536**, 282, (2016)
30. V.R. Shaginyan, V.A. Stephanovich, A.Z. Msezane et al., The Influence of Topological Phase Transition on the Superfluid Density of Overdoped Copper Oxides, *Phys. Chem. Chem. Phys*, **19**, 21964, (2017)
31. J. Dukelsky, V.A. Khodel, P. Schuck et al., Fermion condensation and non Fermi liquid behavior in a model with long range forces, *Z. Phys. B*, **102**, 245, (1997)
32. I. Božović, J. Wu, X. He, A.T. Bollinger, On the origin of high-temperature superconductivity in cuprates, *Proc. SPIE, Oxide-based Materials and Devices VIII*, **10105**, 1010502, (2017)
33. E.A. Pashitskii, The critical temperature as a function of the number of Cooper pairs, and the superconductivity mechanism in a layered LaSrCuO crystal, *Low Temp. Phys.*, **42**, 1184, (2016)
34. G-Q. Hai, L. Candido, B. Brito, F. Peeters, Electron pairing: from metastable electron pair to bipolaron, *Journal of Physics Communications*, **2**, 035017, (2018)
35. Л.П. Горьков, Н.Б. Копнин, Высокотемпературные сверхпроводники с точки зрения эксперимента, *УФН*, **156**, 117, (1988)

36. A. Damascelli, Z. Hussain, Z.-X. Shen, Angle-resolved photoemission studies of the cuprate superconductors, *Rev. Mod. Phys.*, **75**, 473, (2003)
37. M.R. Norman, D. Pines, C. Kallin, The pseudogap: friend or foe of high  $T_c$ ?, *Adv. Phys.*, **54**, 715, (2005)
38. P.A. Lee, Amperean Pairing and the Pseudogap Phase of Cuprate Superconductors, *Phys. Rev. X*, **4**, 031017, (2014)
39. M. Hashimoto, I.M. Vishik, et al., Energy gaps in high-transition-temperature cuprate superconductors, *Nat. Phys.*, **10**, 483, (2014)
40. T. Timusk, B. Statt, The pseudogap in high-temperature superconductors: an experimental survey, *Rep. Progr. Phys.*, **62**, 61-122, (1999)
41. N. Overend, M.A. Howson, I.D. Lawrie, 3D X-Y scaling of the specific heat of  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$  single crystals, *Phys. Rev. Lett.*, **72**, 3238, (1994)
42. I. Maggio-Aprile, Ch. Renner, A. Erb, et al., Direct Vortex Lattice Imaging and Tunneling Spectroscopy of Flux Lines on  $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ , *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 2754, (1995)
43. S.H. Pan, E.W. Hudson, et al., STM Studies of the Electronic Structure of Vortex Cores in  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ , *Phys. Rev. Lett.*, **85**, 1536, (2000)
44. B.W. Hoogenboom, Ch. Renner, et al., Low-energy structures in vortex core tunneling spectra in  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ , *Physica C: Superconductivity*, **332**, 440, (2000)
45. J. Lee, K. Fujita, K. McElroy et al., Interplay of electron–lattice interactions and superconductivity in  $Bi_2Sr_2CaCu_2O_{8+\delta}$ , *Nature*, **442**, 546, (2006)
46. М.В. Садовский, Псевдощель в высокотемпературных сверхпроводниках, *УФН*, **171**, 539, (2001)
47. V.D. Lakhno, A translation invariant bipolaron in the Holstein model and superconductivity, *SpringerPlus*, **5**, 1277, (2016)

## Оглавление

1	Введение . . . . .	3
2	Неидеальный газ ТИ-биполяронов . . . . .	6
3	Статистическая термодинамика газа ТИ-биполяронов низкой плотности . . . . .	9
4	Сравнение с экспериментом . . . . .	14
5	Обсуждение результатов . . . . .	19
6	Приложение. Замечание об обозначениях . . . . .	22
	Библиографический список . . . . .	22