Труды II Международной конференции "МАТЕМАТИКА, КОМПЬЮТЕР, ОБРАЗОВАНИЕ" Москва-Пущино, 27.02-03.03 (1995)

ЧАСТИЦЕПОДОБНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

В.Д.Лахно

Рассмотрены решения, отвечающие основному и возбужденным состояниям нелинейного уравнения Клейна-Гордона. Показано, что в двухмерном случае при константе связи $g>29,6$ всегда существуют возбужденные состояния, которые лежат по энергии ниже основного. В трехмерном случае все возбужденные состояния лежат выше основного. Показано, что в безмассовом пределе, когда затравочная масса $m\to 0$, энергия частицы остается конечной, а ее размер стремится к бесконечности.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время возрос интерес к поиску и исследованию классических решений в квантовополевых моделях. Это связано, в частности, с тем, что решения классических уравнений квантовой электродинамики, т.е. уравнений, в которых квантованные поля заменяются на классические, найденные с помощью теории возмущений, дают правильное описание основных эффектов квантовой электродинамики [1-6]. Вопрос о том, что представляют собой точные решения этих уравнений, когда теория возмущений неприменима, остается открытым. С другой стороны, вообще мало что известно о существовании решений таких уравнений. Наиболее полно в настоящее время, по-видимому, исследованы решения двухмерного и трехмерного нелинейного уравнения Шредингера. Обсуждение свойств этих решений применительно к релятивистскому обобщению нелинейного уравнения Шредингера — нелинейному уравнению Клейна-Гордона и является предметом статьи.

2. НЕЛИНЕЙНОЕ УРАВНЕНИЕ КЛЕЙНА-ГОРДОНА

Уравнение Клейна-Гордона описывает Бозе-частицы, т.е. частицы с целым спином. Его простейшим обобщением является нелинейное уравнение Клейна-Гордона, которое имеет вид

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - c^2\hbar^2\Delta\psi + m^2c^4\psi - g|\psi|^2\psi = 0 , \qquad (1)$$

где g — константа связи. Нелинейное уравнение Клейна-Гордона (К-Г) является предельным случаем различных моделей взаимодействующих частиц. Например, уравнения модели Вика-Гутковского [7-9] в ядерной физике в пределе, когда одна из масс взаимодействующих частиц стремится к бесконечности, приводят к нелинейному уравнению К-Г. Таким образом, возможные решения уравнения (1) представляют методический интерес.

3. ДВУХМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

Полагая в (1) $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$, будем искать стационарные решения двухмерного *(2D)* уравнения в виде

$$\psi = e^{i\alpha x - i\Omega t}f(x,y,t). \qquad (2)$$

Подстановка (2) в (1) приводит к двум уравнениям, получающимся приравниванием нулю действительной и комплексной частей исходного уравнения (1). Из равенства нулю комплексной части вытекает, что решение (2) должно иметь вид

$$f = f(x-vt,y), \qquad \alpha = \Omega/c^2, \qquad (3)$$

где v — имеет смысл скорости частицы. Соответственно, из равенства нулю действительной части вытекает уравнение для f. С использованием масштабного преобразования вида

$$\begin{gathered} x = L^{-1/2}\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}\tilde{x} \\ y = L^{-1/2}\tilde{y} \\ f(x,y)=(L/\tilde{g})^{1/2}Y(\tilde{x},\tilde{y}), \end{gathered} \qquad (4)$$

где

$$L = (m^2c^4 + c^2\hbar^2\alpha^2 - \hbar^2\Omega^2)/c^2\hbar^2$$

$$\tilde{g} = g/c^2\hbar^2$$

уравнение для функции $Y(\tilde{x},\tilde{y})$ приобретает вид

$$\Delta Y + Y^3 - Y = 0$$

$$\Delta = \partial^2/\partial\tilde{x}^2 + \partial^2/\partial\tilde{y}^2. \qquad (6')$$

В таком виде уравнение (6) является исходным во многих математических работах. В частности, изучены некоторые частицеподобные решения, обладающие круговой симметрией, а также решения, не обладающие такой симметрией. На рис.1 приведено одно из решений уравнения (6),(6'), найденное впервые в [10], обладающее осью третьего порядка C_3.

4. ЭНЕРГИЯ ЧАСТИЦ

Для выявления следствий, к которым приводит существование множества решений (1), используем выражение для энергии E, соответствующее (1)

$$E = \frac{\hbar^2}{2mc^2}\int\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\frac{\partial\phi}{\partial t}d^2x + \frac{\hbar^2}{2m}\int(\nabla\phi^*,\nabla\phi)d^2x$$

$$+ \frac{mc^2}{2}\int\phi^*\phi d^2x - \frac{g}{2}\int(\phi^*\phi)^2d^2x \qquad (7)$$

Фигурирующая в (7) функция ϕ должна быть соответствующим образом нормирована. Поскольку для уравнения К-Г ϕ не является волновой функцией, то нормировка определяется суммарным зарядом

$$\int\rho d^2x = e, \qquad (8)$$

где

$$\rho = \frac{ie\hbar}{2mc^2}\left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right).$$

Постановка (4) в соотношения (7) и (8) приводит к следующему выражению для полной энергии (7)

$$E = \frac{1}{2}\left(\frac{\Gamma}{\tilde{g}} + \frac{\tilde{g}}{\Gamma}\right)\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \qquad \Gamma = \int Y^2 d^2\tilde{x}. \tag{9}$$

Точное решение (9) задачи (1) показывает, что теория возмущений в этом случае неприменима как при $g \to 0$, так и при $g \to \infty$. Для первых трех, обладающих круговой симметрией решений в [10], было получено

$$\Gamma_0 = 11,5\ , \qquad \Gamma_1 = 76,4\ , \qquad \Gamma_2 = 194,4\ ,$$

где Γ_n соответствует решению, имеющему n узловых линий. Соответственно, для решений U_3 и U_4 в [10] было получено

$$\Gamma(U_3) = 170,7\ , \qquad \Gamma(U_4) = 189,3\ . \tag{11}$$

Из (9), в частности, следует, что при $\tilde{g} > 29,6$ масса частицы M_n сначала убывает с увеличением n, т.е. $M_0 > M_1$, а затем возрастает с ростом n, т.е. $M_n > M_1$ при $n > 1$. Этот результат представляет методологический интерес так как означает, что энергия возбужденного состояния в нелинейных квантово-механических системах может лежать ниже энергии основного состояния.

5. ТРЕХМЕРНЫЙ СЛУЧАИ

В трехмерном случае соотношения (7),(8) остаются прежними с заменой интегрирования в R^2 на R^3. Подстановка в них соотношений (4) приводит к следующему выражению для энергии в трехмерном случае

$$E = mc^2\,\frac{\sqrt{1+\hbar^2\Gamma^2/\tilde{g}^2m^2c^2}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\ . \tag{12}$$

где

$$\Gamma = \int Y^2 d^3\tilde{x}\ .$$

$Y(\tilde{x},\tilde{y},\tilde{z})$ — решение трехмерного уравнения (6), в котором $\Delta = \partial^2/\partial\tilde{x}^2 + \partial^2/\partial\tilde{y}^2 + \partial^2/\partial\tilde{z}^2$. Выражение для импульса частицы P имеет вид

$$P = \int T_{01} d^3x \ ,$$

где

$$T_{01} = -\frac{\hbar^2}{2mc^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial\psi^*}{\partial x} + \frac{\partial\psi^*}{\partial t}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right).$$

С использованием (4),(13) для импульса получим

$$P = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\sqrt{1+\hbar^2\Gamma^2/\tilde{g}^2m^2c^2} \ . \qquad (14)$$

Характерный размер частицы: $\bar{x}=L^{-1/2}$, где L определяется выражением (5), имеет вид

$$\bar{x} = \frac{\tilde{g}}{\Gamma}\left(1+\hbar^2\Gamma^2/\tilde{g}^2m^2c^2\right)^{1/2} . \qquad (15)$$

Отметим также, что в трехмерном случае выражения для энергии и импульса частицы остаются конечными при $m\to 0$ и имеют вид

$$E = \frac{\hbar c}{\tilde{g}}\frac{\Gamma}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad (16)$$

$$P = \frac{\hbar c}{\tilde{g}}\Gamma\frac{v/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} . \qquad (17)$$

Характерный размер частицы при этом стремится к бесконечности. Из (16),(17) следует, что физическая масса частицы $m_{физ}$ в этом случае целиком обусловлена нелинейным взаимодействием и равна

$$m_{физ} = \frac{\hbar}{\tilde{g}c}\Gamma . \qquad (18)$$

Как и в двухмерном случае, трехмерное уравнение (16) имеет частицеподобные решения. На рис.2 изображены несколько первых найденных численно сферически-симметричных решений трехмерного уравнения (6) [11]. Для них получены следующие значения Γ

$$\Gamma_0 = 18{,}93 \ , \quad \Gamma_1 = 119{,}1 \ , \quad \Gamma_2 = 360{,}7 \ , \quad \Gamma_3 = 803{,}5 \ . \qquad (19)$$

Из (12),(19) следует, что в трехмерном случае физическая масса частицы возрастает с номером решения.

6. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ, СВЯЗАННЫЕ С СУЩЕСТВОВАНИЕМ ЧАСТИЦЕПОДОБНЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Уравнение (1) служит простейшей моделью элементарной частицы. В связи с этим, решения трехмерного уравнения (6) представляют особый интерес. В частности, такие решения согласно (12) определяют спектр масс элементарных частиц. В случае нелинейного уравнения К-Г речь может идти, например, о спектре масс многочисленного семейства мезонов. К сожалению, в настоящее время известны только сферически-симметричные решения (6). По аналогии с двухмерным случаем можно ожидать богатого набора сферически-несимметричных решений трехмерного уравнения (6). В связи с этим полезно отметить, что даже класс сферически-симметричных решений может обладать большим богатством. Так, например, в случае, когда нелинейный член в (1) имеет вид $exp\phi^2$, нелинейное уравнение К-Г имеет область значений параметров, при которых одновременно сосуществуют шесть различных основных состояний (рис.3). Эти результаты свидетельствуют о необычных свойствах нелинейных уравнений квантовой механики.

Работа поддержана грантом РФФИ №95-04-11432а.

ЛИТЕРАТУРА

[1] A.O.Barut and J.Kraus, Found. Phys. 113 (1983) 189

[2] B.Blaive and R.Boudet, Ann. Fond. L. de Broglie 14 (1989) 14

[3] A.O.Barut and J.F.Van Huele, Phys. Rev. A 32 (1985) 3187

[4] A.O.Barut and Y.I.Salamin, Phys. Rev. A 37 (1988) 2284

[5] A.O.Barut and B.Blaive, Trieste Preprint 10/91/85

[6] A.O.Barut, J.Kraus and Y.I.Salamin, Unal N. Phys. Rev. A 45 (1992) 7740

[7] G.C.Wick, Phys. Rev. 96 (1954) 1124

[8] R.E.Gutkovsky, Phys. Rev. 96 (1954) 1135

[9] C.Itzykson and J.B.Zuber, Quantum Field Theory, (Mc. Graw-Hill, 1980)

[10] G.L.Alfimov, V.M.Eleonskiy, N.E.Kulagin, L.M.Lerman and V.P.Silin, Physica D 44 (1990) 168

[11] N.K.Balabaev, V.D.Lakhno and A.M.Molchanov, Preprint (Pushchino, 1983)

[12] A.M.Molchanov, in: Polarons. The works of the Laboratory of Quantum-mechanical Systems (1979-1994), ed. V.D.Lakhno (Pushchino, 1994)

Рис.I. Изображен квадрат решения (приводится с разрешения авторов [10]).

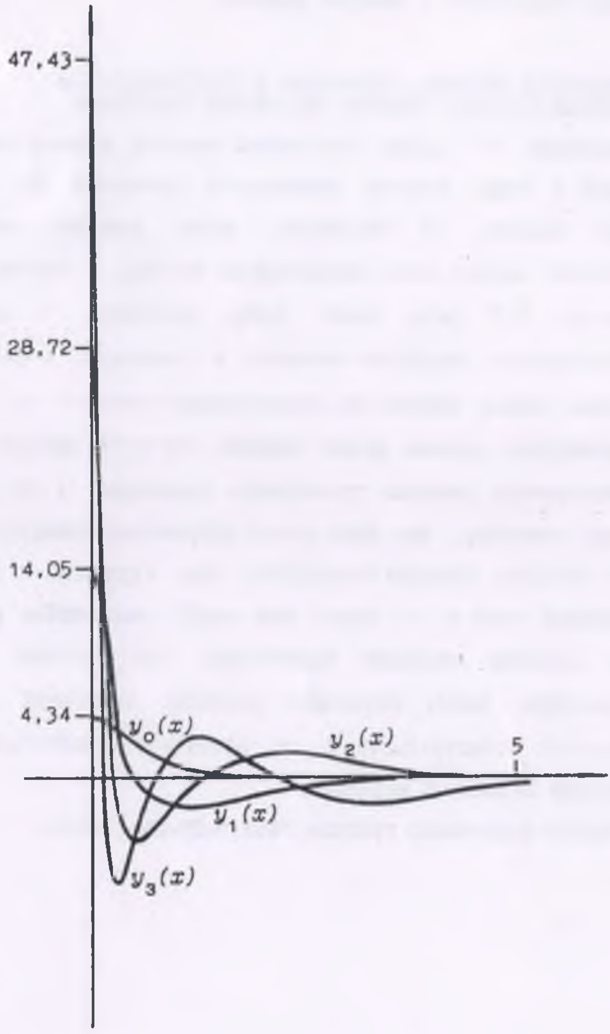

Рис.2. Сферически-симметричные решения трехмерного уравнения (6)

Рис.3. Где $f(y_0)=\left[\ln(1+y_0^2)\right]^{1/2}$, $y_0=y(0)$ - значение в точке $x=0$ уравнения $\Delta y+y\exp y^2-\lambda y=0$ [12]